Приложение № 4 к Основной профессиональной образовательной программе высшего образования программа подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по направлению подготовки кадров высшей квалификации 03.06.01 «Физика и астрономия» направленность «Оптика»

Федеральное агентство научных организаций

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук (ИАиЭ СО РАН)

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИАиЭ СО РАН

академик А.М. Шалагин

____

«16» сентября 2014 г.

Рабочая программа дисциплины

«СОВРЕМЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИЗИКИ»

Основная профессиональная образовательная программа высшего образования

Программа подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по направлению подготовки кадров высшей квалификации

03.06.01 «Физика и астрономия» направленность **«Оптика»**

Форма обучения - очная

Новосибирск 2014 г.

Рабочая программа составлена на основании федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 03.06.01 Физика и астрономия (уровень подготовки кадров высшей квалификации) утвержденной приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 г. №867

Составитель рабочей программы

Зав. лаб., д.ф.-м.н. _____________ Шапиро Д.А.

Рабочая программа утверждена на заседании Ученого совета ИАиЭ СО РАН

«16» сентября 2014 г., протокол №14-08

Председатель Ученого совета, академик, профессор ______________ Шалагин А.М.

Секретарь Ученого совета, д.т.н. ______________ Михляев С.В.

СОГЛАСОВАНО:

Зам. директора Института, д.ф.-м.н. ______________ Бабин С.А.

Вед. научн. сотр., д.ф.-м.н. _______________ Ильичев Л.В.

Аннотация

В стандартных курсах математической физики изучаются разделы, разработанные 150 и более лет назад. Данный факультативный спецкурс поможет познакомиться с некоторыми более современными главами, методами, открытыми примерно 50–70 лет назад. Курс состоит из четырех разделов: первый знакомит с полезными асимптотическими методами, второй с солитонами и другими точными решениями нелинейных уравнений в частных производных, третий с методами обработки экспериментальных данных, а четвертый - с простейшими операторными и групповыми методами. Все разделы сопровождаются примерами из механики, оптики,статистической и квантовой физики. Отбор материала отражает не только научные интересы автора. Из разнообразных математических методов отбирались сравнительно простые, но полезные в нескольких разделах физики. Лекции предназначены только для первого предварительного знакомства с методами. Предполагается, что студенты уже знакомы со стандартными университетскими курсами математики и математической физики. Отдельные лекции, вошедшие в спецкурс, читались на физическом факультете Новосибирского государственного университета в 1996–2014 годах. Лекции предназначены для аспирантов физических специальностей. Курс рассчитан на один семестр. Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, задачи для самостояельного решения, консультации, экзамен в конце семестра. Планируется читать адаптивный курс. Объем материала превосходит необходимый для семестрового курса. Из всей программы каждый раз будут отбираться те разделы, которые больше всего отвечают потребностям конкретной группы аспирантов.

1 Цели и задачи освоения дисциплины

Цели:

Дисциплина «Современные математические методы физики» модуля «Оптика» (индекс по учебному плану Б1.В.ОД.3) является специальной дисциплиной подготовки аспирантов по направлению подготовки 03.06.01 Физика и астрономия (уровень подготовки кадров высшей квалификации) направленность «Оптика» и имеет своей целью обучение аспирантов математическим методам, применяемым в физике. В курсе излагается материал, знание которого полезно как для теоретиков и вычислителей, так и для экспериментаторов. В процессе освоения дисциплины студенты знакомятся с асиптотиками, методами решения нелинейных уравнений, основами тех разделов теории вероятностей и математической статистики, которые нужны непосредственно для обработки экспериментальных данных, симметриями и операторными методами квантовой физики.

Задачи:

1. Углубленное изучение теоретических вопросов волоконной оптики в соответствии с требованиями ФГОС ВО (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки «Физика и астрономия».

2. Развитие практических навыков решения задач в области волоконной оптики и лазерной физики, применения оптических методов в системах анализа вещества, передачи и обработки информации, в технологических и измерительных оптических системах.

3. Формирование у аспирантов представления о современных фундаментальных и прикладных проблемах волоконной оптики, лазерной физики, проблемах приложения оптических методов исследования в науке, технике и биомедицине.

4. Формирование у аспирантов представления о современных фундаментальных и прикладных проблемах оптики, лазерной физики, проблемах приложения оптических методов исследования в науке, технике и биомедицине.

5. Формирование у аспирантов представления о теоретических основах нелинейного взаимодействия оптического излучения с веществом, включая вопросы когерентности лазерного излучения, а также о теоретических методах расчета нелинейных эффектов в оптике и их проявлений в лазерных системах измерения, обработки и передачи информации.

6. Знакомство аспирантов с современной литературой по оптике и нанофотонике, в частности, с математическими методами, применяемыми в расчете оптических и лазерных систем и интерпретации экспериментов.

2 Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы послевузовского профессионального образования (аспирантура)

Дисциплина **«Современные математические методы физики» (модуль оптика)** является обязательной, входит в состав Блока 1 «Дисциплины (модули)» и относится к вариативной части ООП по направлению подготовки 03.06.01 «Физика и астрономия», направленность «Оптика». Индекс дисциплины - Б1.В.ОД.3. Курс «Современные математические методы физики» изучается на втором курсе аспирантуры. Математические методы необходимый элемент образования физика. В разделе рубрикатора Американского физического общества, посвященного математическим методам видно (рис.1), что практически не осталось такого раздела в математике, который бы не нашел применения. В то же время никто не пытается решить совершенно безнадежную задачу: научить студентов и аспирантов физиков всей современной математики. В программу входят несколько сравнительно простых математических методов, полезных в разных частях физики. Именно эти методы могут и не понадобится в дальнейшем кому-то из аспирантов, но всем пригодится навык усвоения нового математического аппарата с практическим прицелом, то есть с применением при решении конкретных физических задач.

3 Требования к уровню подготовки аспиранта, завершившего изучение данной дисциплины

Процесс изучения дисциплины **«Современные математические методы физики»** направлен на формирование следующих компетенций:

Код компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
УК-2	способность проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки	владеть навыками постановки и проведения научных исследований, иметь целостное представление о значимости и актуальности работы, владеть методами критического анализа научной проблемы и современными подходами ведения научно-исследовательских работ
УК-4	готовность использовать современные методы и технологии научной коммуникации на государственном и иностранном языках	отчуждать научные результаты через средства научной коммуникации структурировать тексты, описывающие научных результатов
УК-5	способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития	уметь планировать и решать поставленные задачи
ОПК-1	способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	четко и уверенно излагать содержание выполненных исследований, аргументировано отвечать на вопросы и вести научную дискуссию уметь использовать современные приборы и технологии для проведения исследований и обработки полученных результатов
ОПК-2	готовностью к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования	Знать основные образовательные программы, уметь излагать материал по образовательным программам
ПК-1	способность к теоретическим исследованиям в области волновой и квантовой оптики, волоконной и нелинейной оптики, оптической спектроскопии, оптической обработки информации, оптических методов измерения и контроля	Уметь: • получать приближенные аналитические решения в предельных случаях • решать одномерную обратную задачу рассеяния в прозрачной среде • выводить расчетные формулы для обработки данных методом максимального правдоподобия • находить точные решения волнового

		уравнения в системе с высокой симметрией
ПК-2	способность разрабатывать теоретические модели и выполнять численное моделирование оптических процессов в классических и квантовых системах	Владеть: - методами подгонки экспериментальных точек теоретической формулой с оценкой погрешности параметров - теорией солитонов, интегралов по путям, операторными и симметрийными методами, - техникой сращивания асимптотических разложений

4 Объем дисциплины, содержание и структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **5** зачетных единицы, **180** часов.

Тема	Лекции, (ч)	Самостоят. работа, (ч)	Формы контроля
Год обучения 2			
Введение в предмет. Цели и задачи курса, его общая структура. Метод погранслоя. Пограничный слой. Переходный слой. Слой внутри области.	4	5	
Явления Стокса. Квазиклассическое приближение. Простая точка поворота. Две простые точки поворота.	3	4	
Слияние особенностей. Равномерное разложение. Стационарная точка вблизи границы. Две близкие стационарные точки	4	5	
Задача рассеяния. Оператор Шрединшера. Функции Йоста. Аналитические свойства. Треугольное представление.	3	4	
Обратная задача рассеяния. Задача Гурса. Уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко. Примеры.	4	5	
Метод обратной задачи рассеяния. Изоспектральное преобразование. LA-пара для КдВ. Уравнения ГГКМ. Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР)	3	4	
Солитоны. Линейный потенциал Баргмана. Квадратичный потенциал Баргмана. Двухсолитонный пример	4	5	
Коллапс. Интегралы движения. Гамильтонов формализм. Уравнение для размера пучка. Теорема Таланова	3	4	
Закон Больших чисел. Производящая функция. Центральная предельная теорема.	3	4	
Подгонка экспериментальных данных теоретической кривой. Принцип максимального правдоподобия. Погрешности подгоночных параметров. Обработка данных с ошибками по обеим осям.	4	5	
Тензор Грина для уравнений Максвелла. Уравнение Дайсона. Первое борновское приближение.	3	4	

Интеграл по путям. Хронологический оператор. Феймановский интеграл. Классическая траектория.	3	4	
Диаграмы Кэли.Граф циклической группы. Группы с треугольника и тетраэдра. Инвариантная подгруппа. Группа кватернионов.	4	5	
Операторный метод построения спектра. Суперзаряды. Реализация. Уравнение Шредингера.	3	4	
Симметрия дифференциальных уравнений. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Уравнения в частных производных. Общая схема.	3	4	
Группа Лоренца. Симметрия оператора вторго порядка. Группа Лоренца. Представления	3	4	
Конструирование инвариантных уравнений. Инвариантная система уравнений. Минимизация числа компонент. Матрицы Дирака.	4	10	Экзамен

В учебном процессе используются активные и интерактивные формы занятий в сочетании с внеаудиторной работой. Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, составляет не менее 30% аудиторных занятий.

В рамках изучения данной дисциплины реализация компетентностного подхода предусматривает широкое использование в учебном процессе традиционных образовательных технологий, активных и интерактивных форм проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся.

В рамках изучения данной дисциплины используются: мультимедийные образовательные технологии: интерактивные лекции (презентации);

5 Самостоятельная работа аспирантов

Основной формой деятельности аспирантов по дисциплине является самостоятельная проработка конспектов лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение, с помощью основной и дополнительной литературы с привлечением компьютерных средств, а также индивидуальные занятия с преподавателем, направленные на практические исследования по представленным темам. Компьютерные демонстрации формирования моды и распространения излучения в световоде, лабораторные демонстрации основных волоконно-оптических устройств, обязательное участие в заседаниях еженедельного семинара Учебно-научного центра «Квантовая оптика».

Вопросы для самостоятельного изучения:

1. Квазиклассические уровни в двойной потенциальной яме
2. Потенциал Баргмана для солитонных решений нелинейного уравнения Шредингера.

3. Итерационный метод численной подгонки теоретической кривой
4. Двумерный тензор Грина для задач фотоники и метод точечных диполей.
5. Вывод уравнений Максвелла из соображений симметрии.

6 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература:

1. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. Физматлит, 2009

2. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды Физматлит, 2002

3. Брычков Ю.А. Специальные функции. Производные, интегралы, ряды и другие формулы. Справочник. Физматлит, 2006.

4. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. Физматлит 2009

5. Борисёнок С.В., Кондратьев А.С., Квантовая статистическая механика. Физматлит 2011

6. Наймарк М.А. Теория представлений групп. Физматлит, 2010

7. Вергелес С.Н. Лекции по квантовой электродинамике Физматлит, 2005

Дополнительная литература:

1. Д. Худсон, Статистика для физиков (Мир, Москва, 1970).

2. Л. Новотный, Х. Б., Основы нанооптики (ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2009).

3. Р. Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям (Мир, Москва, 1968).

6. Л. Э. Генденштейн, И. В. Криве, “Суперсимметрия в квантовой механике,” Усп.физ. наук 146, 553–590 (1985).

7. А. Д. Полянин, Справочник по линейным уравнениям математической физики (Физматлит, Москва, 2001).

8. Д. Эллиот, П. Добер, Симметрия в физике, т.2 (Мир, Москва, 1983).

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика Т.3. Квантовая механика (нерелятивистская теория) Физматлит, 2001

9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая электродинамика (Наука, Москва,1989).

2. Д. Коул, Методы возмущений в прикладной математике (Мир, Москва,1972).

2. Курош А.Г. Теория групп 3-е изд., 1967 г.

5 . М. Абрамовиц, И. Стиган, Справочник по специальным функциям (Наука,Москва, 1979).

7 . В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, Теория солитонов: метод обратной задачи рассеяния (Наука, Москва, 1980).

9 . Р. Фейнман, Статистическая механика (Мир, Москва, 1975).

14. Д. П. Желобенко, А. И. Штерн, Представления групп Ли (Наука, Москва, 1983).

15. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Квантовая электродинамика (Наука, Москва, 1980).

Методическая литература:

1. Е.А. Кузнецов, Д.А. Шапиро. Методы математической физики. Ч.I (Курс лекций). НГУ, Новосибирск, 2011, 115 стр.
2. Учебное пособие по курсу: Шапиро Д.А. Современные математические методы физики (учебное пособие). Новосибирск: НГУ, 2014, 115 с.
3. И. В. Колоколов, Е. А. Кузнецов, А. И. Мильштейн, Е. В. Подивилов, А. И.Черных, Д. А. Шапиро, Е. Г. Шапиро, Задачи по математическим методам физики. Изд. 3е. (URSS, Москва, 2007).

Научные статьи:

1. Л.Э. Генденштейн, И.В. Криве, Суперсимметрия в квантовой механике, Усп. физ. наук 146, 553--590 (1985).

2. А.Д. Полянин, Элементарная теория использования инвариантов для решения математических уравнений, Вестник Самарского государственного университета, 65, 152--176 (2008).

3. V.Bargmann, On the connection between phase shifts and scattering potential, Rev. Mod. Phys. 21, 488--493 (1949).

4 .В.Беспалов, В.Таланов, О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях, Письма в ЖЭТФ, 3, 471--476 (1966).

5. В.Е. Захаров, А.Б. Шабат, Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, ЖЭТФ, 61, 118--134 (1971).

6. J.Orear, Least squares when both variables have uncertainties, American Journal of Physics, 50, 912--916 (1982).

7. A.Bambini and P.R. Berman, Analytic solutions to the two-state problem for a class of coupling potentials, Phys. Rev. A ,23, 2496, (1981).

8. E.V. Podivilov, D.A. Shapiro, and D.A. Trubitsyn, Exactly solvable profiles of quasi-rectangular Bragg filter with dispersion compensation, JOpt A: Pure and Applied Optics, 8, 788--795 (2006).

7 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Обучение аспирантов происходит в Учебном центре Института автоматики и электрометрии СО РАН, созданном совместно Новосибирским университетом. Учебный центр состоит из трех классов, в которых походят лекционные занятия, а также классы доступны более 30 часов в неделю для самостоятельной подготовки аспирантов. Классы укомплектованы 20 компьютерами, оснащены оборудованием для проведения практических и лабораторных занятий (программирование микроконтроллеров, практикум по схемотехнике с использованием паяльного оборудования) и оборудован системой вентиляции. В классах имеется демонстрационное оборудование (мультимедиа- и оверхед-проекторы) и звуковая система для проведения видеоконференций.

8 Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Формой текущего контроля работы аспирантов по дисциплине «Современные математические методы физики является индивидуальное» обсуждение с преподавателем задач для самостоятельного решения.

Промежуточная аттестация по дисциплине

Промежуточная аттестация проводится в форме в форме собеседования после окончания темы: «Задача рассеяния». Каждому аспиранту задается два вопроса: один по асимтотическим методам, второй по теории рассеяния.

Задачи к экзамену

1) Найти характерные пределы при $\varepsilon \to 0$ и решить краевую задачу

$$\varepsilon y'' + y' - xy = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = e^{\frac{1}{2}}.$$

2) Найти характерные пределы при $\varepsilon \to 0$ и решить краевую задачу

$$\varepsilon y'' - y' = 0, \quad y(0) = \alpha, y(1) = \beta.$$

3) Показать, что в общем случае константа Стокса в точке поворота равна

$$\alpha = 2i\cos\frac{\pi}{q+2},$$

где q – порядок точки поворота.

4) Найти равномерную по параметру a асимптотику интеграла:

$$F(\lambda, a) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(\operatorname{ch}t - at)}}{1+t^2}dt \text{ при } \lambda \to \infty.$$

5) Найти равномерную по параметру a асимптотику интеграла:

$$F(\lambda, a) = \int_0^\infty \frac{e^{i\lambda(\operatorname{sh}t - at)}}{1+t^2}dt \text{ при } \lambda \to \infty.$$

6) Найти и сравнить правый и левый коэффициенты отражения от прямоугольного барьера $U(x) = U_0, -a < x < a$. Доказать, что для произвольного потенциала левый и правый коэффициенты отражения отличаются только фазой.

7) Найти коэффициенты отражения и прохождения для потенциала

$$U(x) = A[\delta(x+a) - \delta(x)]$$

Исследовать предельный случай $a \to 0$.

8) Проверить, сохраняет ли уравнение КдВ $u_t + uu_x + 6u_{xxx} = 0$ интегралы:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{u} dx, \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\, dx,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u^2}{2} - u^3\right) dx.$$

9) Дано уравнение КдВ: $u_t + uu_x + 6u_{xxx} = 0.$

а). Получить уравнение на потенциал скорости Φ такой, что $u = \Phi_x$.

б). Подобрать коэффициент *a* подстановки Коула – Хопфа $\Phi = \mathrm{a}\, \partial_x \ln f$, чтобы на *f* получилось однородное уравнение.

в) Если искать решение уравнения на *f* в виде суммы (оборванного ряда)

$$f = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n f_n$$

то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, можно получить уравнение на функции f_n. Вывести уравнение на f_1, если f_2=0, получить его решение и найти функцию *u(x,t)*.

10) Найти потенциал *u(x)*, в котором уравнения Захарова – Шабата

$n_1' + ikn_1 = u(x)n_2, \;\; n_2' - ikn_2 = -u(x),$

имеют аналитическое решение. Найти локализованное решение. *Указание:* Искать решение в виде $n_1 = e^{-ikx}[4ik + a(x)], \;\; n_2 = e^{-ikx}b(x)$. Получить и решить уравнения на вспомогательные функции *a,b* и потенциал Баргмана *u*.

11) Вывести формулу для гауссового интеграла

$$\int dx\; \exp\left[-\frac{1}{2}(x, Ax) + i(\kappa, x)\right] = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\kappa, A^{-1}\kappa)\right],$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ - n-мерные действительные векторы, *A* – симметричная невырожденная матрица, а круглые скобки означают скалярное произведение.

12) Найти функцию Грина $G(x, x', t)$ уравнения Фоккера – Планка, т. е. решить уравнение

$$G_t = \partial_x\left(\frac{1}{2}\partial_x G + xG\right), \;\; G(x, x', 0) = \delta(x - x')$$

Указание: Искать решение в виде гауссовской функции $G = \exp(ax^2 + bx + c)$ и получить обыкновенные уравнения на коэффициенты *a,b,c*.

13) Подобрать подходящую функцию *W(x)* для модифицированного уравнения Пешля – Теллера с безотражательным потенциалом $U(x) = -a(a+1)/\operatorname{ch}^2 x$. Проверить форминвариантность потенциала и построить спектр. Убедиться, что в такой яме имеется лишь конечное число связанных состояний, и найти это число.

14) Для пространственного осциллятора

$$U(x) = \frac{r^2}{2} + \frac{l(l+1)}{2r^2}$$

подобрать функцию *W(x)*, проверить форминвариантность и построить спектр. Какова кратность вырождения уровней?

15) Найти семейство преобразований симметрии и упростить нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

Возникает ли дополнительное упрощение в частном случае *f(u)*=exp *u*?

16) Найти семейство инвариантных преобразований масштаба и автомодельное решение уравнения КдВ: $u_t + uu_x + 6u_{xxx} = 0$.

17) Найти семейство преобразований симметрии и упростить уравнение Буссинеска:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial u}{\partial x}\right] + b\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Критерии оценивания:

Положительная оценка ставится в том случае, когда экзаменационная задача доведена до ответа. Аспиранту задаются дополнительные вопросы об области применимости решения, о предельных случаях решения, о возможности распространения решения на более общий случай.

Неудовлетворительная оценка ставится, если аспирант не смог решить задачу даже после явного указания математического метода решения.